

Def: Dimensione di $V(K)$

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{0\} \\ |B| & \text{ove } B \text{ base di } V \text{ se } V \neq \{0\}. \end{cases}$$

$V_n(K)$ sp. vettoriale di $\dim = n$ su K .

$$\underline{V_n(K) \cong K^n}$$

Dove l'isomorfismo è determinato
dal fissare una base di $V_n(K)$.

N.B. Non è unico!

Def: Si dice base canonica di K^n la base

$$B = ((100\dots 0), (010\dots 0), \dots, (00\dots 01))$$

rispetto cui il vettore delle componenti di ogni $\vec{v} \in K^n$

è $\vec{v}$ stesso.

$$\vec{v} = (a_1 \ a_2 \dots a_n) = a_1 (100\dots 0) + a_2 (010\dots 0) + \dots + a_n (00\dots 01)$$

vettore componenti di $\vec{v}$ rispetto B

$$(a_1 \ a_2 \dots a_n) = \vec{v}$$

$$\Phi_B: K^n \rightarrow K^n$$

$$a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n \rightarrow (a_1 \dots a_n)$$

è l'identità.

N.B.: la base $((010), (100), (001))$ di $\mathbb{R}^3$ non è canonica!

$$(a, b, c) = b(010) + a(100) + c(001) \rightarrow \text{comp. } (b, a, c).$$

• Dati una seq. g di generatori, aggiungere ingrandire g .

→ Aggiungere vettori A g di ancora una seq. di generatori.

• Dati una seq. libera A , rimpicciolire A
→ TOGLIERE VETTORI AD A
(per di non logorizzarli!!)
Lascia la seq. libera.

• Dati una seq. di generatori a volte (e ne è logico) la possiamo rimpicciolire → METODO D. SCARTE
SUCCESSIVI.

• Dati una seq. libera A vogliamo ingrandirla (mantenendola sempre libera) → AL MASSIMO OTTENIAMO
UNA BASE.

Teorema di completamento della base.

H_P: Sia $V_n(K)$ uno sp. vett. su K f.s.

$A = (\bar{\alpha}_0 \dots \bar{\alpha}_m)$ una seq. libera di m vettori ($0 \leq m \leq n$).

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una base di $V_n(K)$.

E: Allora è sempre possibile estrarre da B una sequenza B' di $(n-m)$ vettori tale che $A \cup B'$ sia una base di $V_n(K)$.

DLM: Simile al lemma di Steinitz.

• $A = \emptyset \Rightarrow B' = B$ fine.

• A è base e quindi $|A| = n \Rightarrow B' = \emptyset$ fine.

$$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_m]$$

$$1 \leq m < n$$

$$B = [\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \dots \ \bar{b}_m \ \bar{b}_{m+1} \ \dots \ \bar{b}_n]$$

sostituiamo come in seguito ad m vettori di B gli m vettori di A .

$$B_m := [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_m \ \bar{b}_{m+1} \ \dots \ \bar{b}_n]$$

è di generatori; n vettori $\Rightarrow$ BASE.

$$B' = B_m \setminus A$$

□

Esercizio: Completare a base di $\mathbb{R}^4$

$$A = \{ (1 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0), (1 \ 1 \ 1 \ 1) \}$$

$$B = ((1 \ 0 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0 \ 0), (0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1))$$

$$(11\ 00) = 1(1000) + 1(0100)$$

$$B_1 = ((1100), (0100), (0010), (0001)).$$

$$B_n \quad (0100) = 0 \cdot (1100) + 1 \cdot (0100) + \dots$$

$$B_n = ((1100), (0100), (0010), (0001)).$$

$$(1111) = 1 \cdot (1100) + 0 \cdot (0100) + 1 \cdot (0010) + 1 \cdot (0001).$$

$$B_3 = ((1100), (0100), (1111), (0001))$$

$$B'_1 = ((0001)).$$

$$A = ((0011), (00-11))$$

$$B = ((1000), (0100), (0010), (0001)).$$

$$(0011) = 0 \cdot (1000) + 0 \cdot (0100) + 1 \cdot (0010) + 1 \cdot (0001)$$

$$B_1 = ((1000), (0100), (0011), (0001))$$

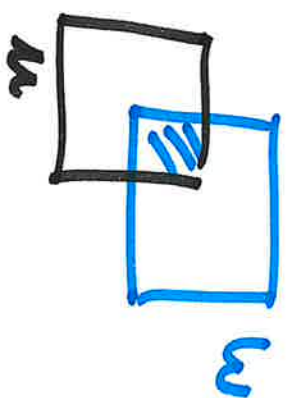
$$(00-11) = 0 \cdot (1000) + 0 \cdot (0100) + 1 \cdot (0011) + 2 \cdot (0001)$$

$$B_1 = ((1000), (0100), (0011), (00-11))$$

□

oss: Siano $u, w \leq V(1k)$. $\Rightarrow u \cap w \leq V(1k)$.

Δ Sia g_1 un insieme di gen. per u e g_2 un insieme di gen. per $w \Rightarrow$



Non è detto $g_1 \cap g_2$ di gen. per $u \cap w$.

$$\mathcal{L}(g_1 \cap g_2) \subseteq u \cap w$$

es. in $\mathbb{R}^3$

$$u = \mathcal{L}((100))$$

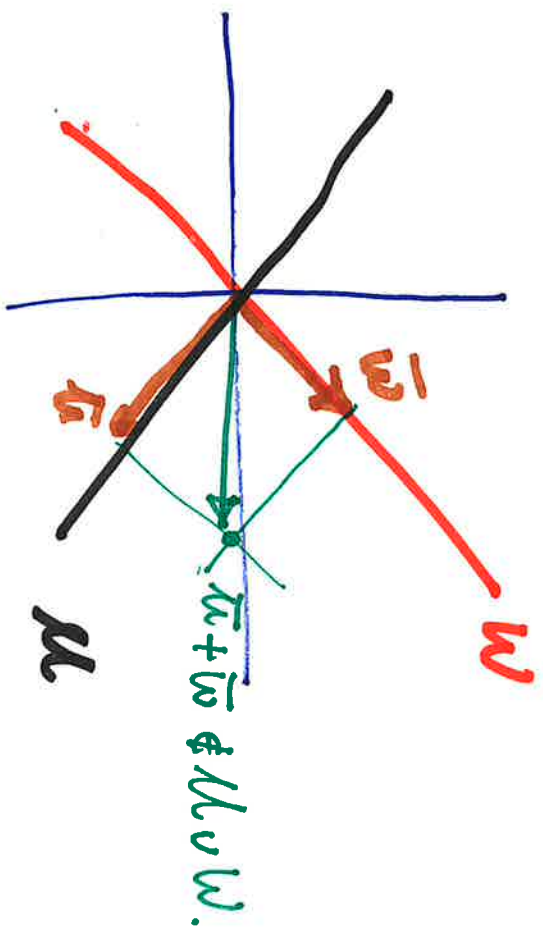
$$u \cap w = u = w$$

$$w = \mathcal{L}((200))$$

$$\{(100)\} \cap \{(200)\} = \emptyset \quad \mathcal{L}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

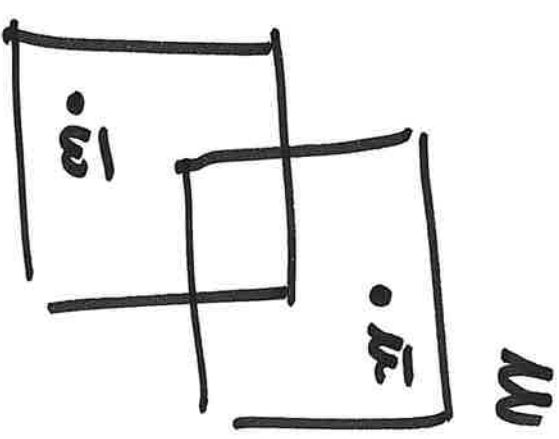
oss: Siano $u, w \leq V(1k) \Rightarrow u \cup w \leq V(1k) \Leftrightarrow u \subseteq w$ o $w \subseteq u$

cioè $u \cup w = u$ oppure $u \cup w = w$.



D14: Supponiamo $M \neq W$ e $W \neq M$

$$\Rightarrow \exists \bar{u} \in M \setminus W \text{ e } \exists \bar{w} \in W \setminus M$$



facciamo vedere che $\bar{u} + \bar{w} \notin M \cup W$

infatti se fosse $\bar{u} + \bar{w} \in M \Rightarrow \bar{u} + \bar{w} - \bar{u} \in M \Rightarrow \bar{w} \in M$

$\bar{u} + \bar{w} \in W \Rightarrow \bar{u} + \bar{w} - \bar{w} \in W \Rightarrow \bar{u} \in W$

$\Rightarrow$ Ne segue $\bar{u} + \bar{w} \notin M \cup W$

□

Nella ci vieta di considerare

$$\mathcal{L}(U \cup W) \leq V_n(K).$$

Def: Siano $U, W \leq V(K)$. Definiamo

$$U + W := \{ \bar{x} + \bar{w} \in V \mid \bar{x} \in U, \bar{w} \in W \}.$$

Somma di U e W .

Teorema: $U + W = \mathcal{L}(U \cup W)$.

DLM: Se $X \leq V(K)$ con $U \cup W \leq X \Rightarrow \forall \bar{x} \in U, \forall \bar{w} \in W$
 $\bar{x} + \bar{w} \in X \Rightarrow U + W \leq X \Rightarrow U + W \leq \mathcal{L}(U \cup W)$.

$$\forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall \bar{x} + \bar{w}, \quad \bar{x}' + \bar{w}' \in U + W$$

$$\alpha(\bar{x} + \bar{w}) + \beta(\bar{x}' + \bar{w}') =$$

$$= (\alpha \bar{u} + \beta \bar{u}') + (\alpha \bar{w} + \beta \bar{w}'). \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$$

□

$$\in \mathcal{U} \quad \in \mathcal{W}$$

$\Pi: \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{W}$ est une fonction
linéaire.
 $(\bar{u}, \bar{w}) \rightarrow \bar{u} + \bar{w}$

N.B. Se $\mathcal{U} = \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Se g_1 est de genre. par $\mathcal{U} \Rightarrow g_1 \cup g_2$ est de genre.
 g_2 est de genre. par $\mathcal{W} \Rightarrow g_1 \cup g_2$ par $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} + \mathcal{W} &= \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(g_1) \cup \mathcal{L}(g_2)) = \\ &= \mathcal{L}(\mathcal{L}(g_1 \cup g_2)) \Rightarrow g_1 \cup g_2 \text{ genre!} \end{aligned}$$

Δ Se $B_1 = \text{base di } M$

$B_2 = \text{base di } W$

$\Rightarrow B_1 \cup B_2$ di ugu.

per $M+W$

ma non necessariamente
base!

$M = \mathcal{L}((100), (010))$

$W = \mathcal{L}((110))$

$((100), (010), (110))$

non sono una
seq. libera!

$M = \mathcal{L}((100), (010))$

$((100), (010), (201), (001))$

$W = \mathcal{L}((201), (001))$

LEGATA!

Es. : Se $U, W \leq V(K)$ $\Rightarrow$

$U \times W$ è spazio vettoriale con le operazioni

$$\alpha \cdot (\bar{u}, \bar{w}) = (\alpha \bar{u}, \alpha \bar{w})$$

$$(\bar{u}, \bar{w}) + (\bar{u}', \bar{w}') = (\bar{u} + \bar{u}', \bar{w} + \bar{w}').$$

Es. far vedere che se B_1 base di U
 B_2 base di W

$$\Rightarrow B_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times B_2 \text{ base di } U \times W.$$

$$(\text{Teorema 15.1}) \quad \dim(U \times W) = \dim U + \dim W$$

$$\dim U + W \leq \dim U + \dim W.$$

$$\pi: U \times W \rightarrow U + W$$

$$\begin{aligned}
 \ker \pi &:= \pi^{-1}(\underline{0}) = \{ (\bar{u}, \bar{w}) : \pi(\bar{u}, \bar{w}) = \underline{0} \} \\
 &= \{ (\bar{u}, \bar{w}) : \bar{u} + \bar{w} = \underline{0} \} = \\
 &= \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} \}.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{w} = -\bar{u}}$$

In particolare $(\bar{u}, -\bar{u}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} \Leftrightarrow \bar{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

$\rightarrow$ Se $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{ \underline{0} \} \Rightarrow \ker \pi = \{ \underline{0} \}.$

Altrimenti: $\ker \pi = \{ (\bar{u}, -\bar{u}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} \mid \bar{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \} \cong \mathcal{U} \cap \mathcal{W}.$

$f: V \rightarrow W$ linear

$$\ker f = \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{0} \}.$$

Se f injectiva $\Rightarrow \ker f = \{ \bar{0} \}$.

$$\Rightarrow \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in \ker f.$$

$$= \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) =$$

oss: $\ker f \leq V$
injectiva $\bar{x}, \bar{y} \in \ker f \Rightarrow \alpha, \beta \in K$

$$\text{Si } \bar{v} \in V \text{ e } \bar{k} \in \ker f \Rightarrow f(\bar{v} + \bar{k}) =$$

$$= f(\bar{v}) + f(\bar{k}) = f(\bar{v})$$

$$f(\bar{v} + \ker f) = f(\bar{v})$$

$$\text{Supponiamo } f(\bar{v}) = f(\bar{w}) \Rightarrow f(\bar{v}) - f(\bar{w}) = \bar{0}$$

"

$$f(\bar{v} - \bar{w}) \Rightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \ker f$$

$$\Rightarrow \bar{v} \in \bar{w} + \ker f$$

Def: V, W sp. ve K oriali su K
 $f: V \rightarrow W$ lineare

$\text{Ker } f := \{v \in V : f(v) = 0\}$. Kernel o nucleo.

1) $\text{Ker } f \leq V$ infatti $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{v}, \bar{w} \in \text{Ker } f$:

$$f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

2) La funzione f è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

a) ~~Se~~ $\exists \bar{v} \in \text{Ker } f$ con $\bar{v} \neq 0 \Rightarrow f(\bar{v}) = f(0) = 0 \Rightarrow f$ non iniettiva.

b) Supponiamo $\text{Ker } f = \{0\}$ e siano $\bar{v}, \bar{w} \in V$ tali che

$$f(\bar{v}) = f(\bar{w}) \Rightarrow f(\bar{v}) - f(\bar{w}) = 0 = f(\bar{v} - \bar{w}) = 0 \Rightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \text{Ker } f.$$

$$\Rightarrow \bar{v} - \bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}.$$

3) Sia $\bar{v} \in V \Rightarrow f(\bar{v}) = f(\bar{w}) \Leftrightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \bar{w} - \bar{v} \in \text{Ker } f$
 $\Leftrightarrow \bar{w} \in \bar{v} + \text{Ker } f.$

□

$$f(\bar{x}) = \bar{b}$$

e conosciamo $\text{Ker } f = \text{s.v.e. } H.$

una preimmagine $\bar{x}_0$ di $\bar{b}$

$\Rightarrow$ è possibile trovare tutti $\bar{x}_0 + \text{Ker } f$

$$= \{ \bar{x}_0 + \bar{y} \mid \bar{y} \in \text{Ker } f \}.$$

$$f(\bar{x}) = \underline{0}$$

Def. Siano $U, W \subseteq V(K)$. Si dice che la somma $U+W$ è diretta e si scrive $U \oplus W$ quando ogni vettore $\bar{v}$ di $U+W$ si può scrivere in modo unico come $\bar{u} \in U, \bar{w} \in W$

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}.$$

$$U \oplus W \Leftrightarrow \forall \bar{v} \in U+W \exists ! (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W \text{ con } \bar{v} = \bar{u} + \bar{w}.$$

Questo si verifica $\Leftrightarrow \ker \pi = \{ (0, 0) \}$.

$$\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}.$$

CONSEGUENZA:

$$U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}.$$

DIM senza appl. lineari.

• Se ~~non~~ $\exists \bar{x} \in M \cap W$ tale che $\bar{x} \neq 0$

$$\Rightarrow \forall \bar{u} \in M, \forall \bar{w} \in W \quad \bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$$

$\in M \quad \in W$

e quindi la somma non è diretta.

$$\Rightarrow \text{C.N. è } M \cap W = \{0\}$$

Supponiamo $M \cap W = \{0\}$ e che per assurdo

la somma non sia diretta $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \bar{u}, \bar{u}' \in M, \bar{w}, \bar{w}' \in W \text{ tali che}$$

$$\bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}' \Rightarrow \bar{u} - \bar{u}' = \bar{w}' - \bar{w}$$

$\in M \quad \in W$

$$\Rightarrow \bar{u} - \bar{u}', \bar{w} - \bar{w}' \in \{0\} \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}', \bar{w} = \bar{w}'$$

oss: Se $M \oplus W \Rightarrow$ data A seq. libera di W
 A' seq. libera di W

$\Rightarrow A \cup A'$ è una seq. libera di $M \oplus W$.

Ogni vettore di $M \oplus W$ si scrive in modo
unico come $\bar{u} + \bar{w}$ con $\bar{u} \in M$ e $\bar{w} \in W$

$$\Rightarrow \text{data } \underline{0} = \bar{u} + \bar{w} \Rightarrow \bar{u} = \underline{0} \\ \bar{w} = \underline{0}$$

$$\text{Ma } \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k + \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{a}'_n = \underline{0}$$

una c. lineare dei vettori di $A \cup A'$. Per quanto

detto prima $\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = \underline{0}$ ma A libera $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\beta_1 \bar{a}_1 + \dots + \beta_n \bar{a}_n' = \underline{0} \text{ ma } A' \text{ libera}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0.$$

$$\Rightarrow A \cup A' \text{ libera}$$

□

Sia $f: V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

Se $\ker f = \{ \underline{0} \} \Rightarrow f$ manda sequenze libere di vettori in sequenze libere.

Dim: Sia $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)$ una seq. libera $\Rightarrow$

$$f(A) = (f(\bar{a}_1) \dots f(\bar{a}_n)) \text{ è libera}$$

In fatti: per ipotesi $f(\bar{a}_1) \dots f(\bar{a}_n)$ libera

$$\Rightarrow \nexists \alpha_1 \dots \alpha_n \neq (0 \dots 0): \alpha_1 f(\bar{a}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{a}_n) = \underline{0}$$

$$\alpha_2 f(\bar{\alpha}_2) + \dots + \alpha_k f(\bar{\alpha}_k) =$$

$$f(\alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \dots + \alpha_k \bar{\alpha}_k) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \dots + \alpha_k \bar{\alpha}_k \in \ker f = \{\underline{0}\}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \dots + \alpha_k \bar{\alpha}_k = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0 \quad \square$$

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim V$$

$$f: V \rightarrow W$$

$$\ker f = \{\underline{0}\}.$$

$$\dim M \oplus W = \dim M + \dim W.$$

$$\dim M + W \leq \dim M + \dim W.$$

Formula di Grassmann.

$$\dim M + W = \dim M + \dim W - \dim M \cap W$$
$$\dim \operatorname{Im}(\pi) = \dim \operatorname{Dom}(\pi) - \dim \operatorname{Ker}(\pi)$$

Se A, B sono insiemi

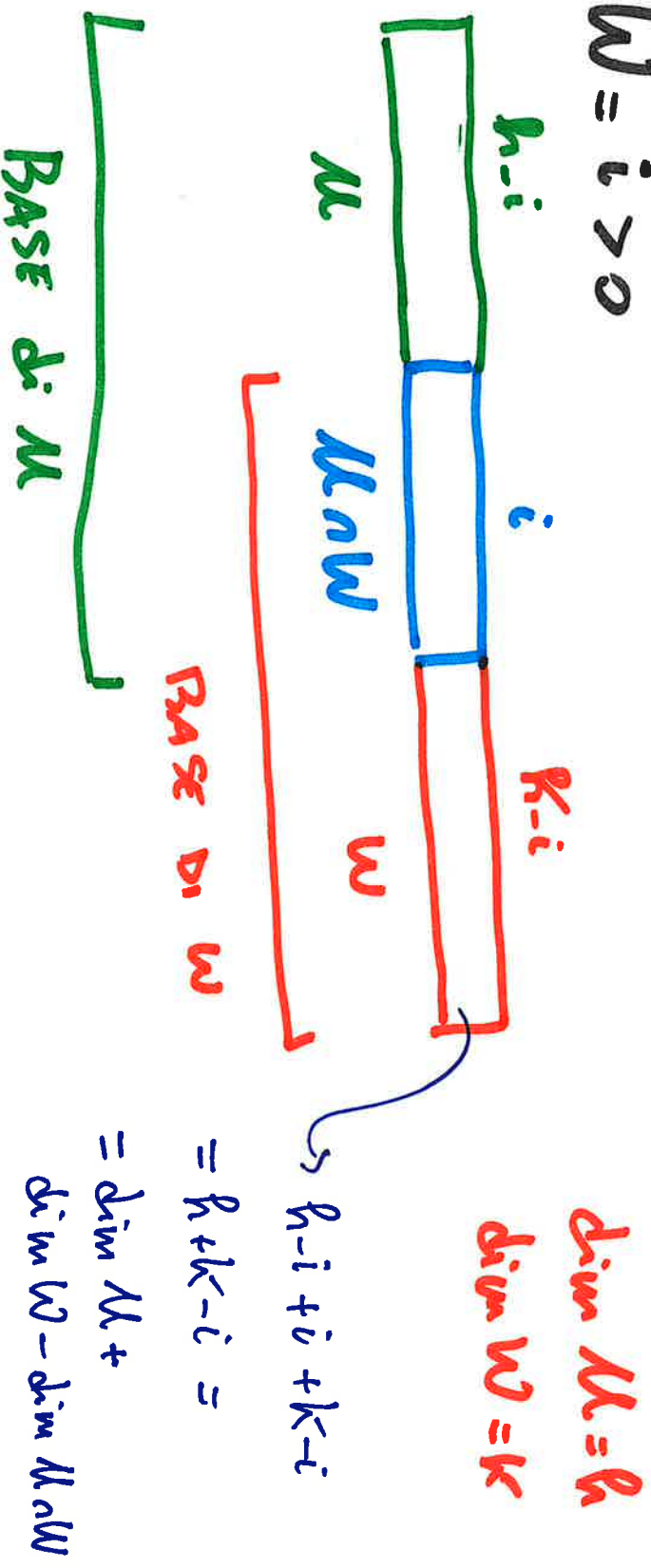
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$\text{Se } \dim U \cap W = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow U \oplus W$$

$$\begin{aligned} \text{e } \dim U \oplus W &= \dim U + \dim W - 0 = \\ &= \dim U + \dim W - \dim U \cap W. \end{aligned}$$

$$\dim U \cap W = i > 0$$



La rappresentazione di vettori è unione di 2 basi di U e W e dunque è di generatore.

$B_I = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ has base μ_n

$B_v = (\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{h-i} \bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ has base μ

$B_w = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{k-i} \bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ has base w .

Supponiamo $(\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{h-i} \bar{e}_1 \dots \bar{e}_i \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{k-i})$

legge $\Rightarrow$

$$\alpha_1 \bar{\mu}_1 + \dots + \alpha_{h-i} \bar{\mu}_{h-i} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i +$$

$$\gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{k-i} \bar{w}_{k-i} = \underline{0}$$

con coeff. non tutti $= 0$

$$\underline{0} = \bar{X} - \bar{X} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \bar{u}_{n-1} - \delta_1 \bar{e}_1 \dots - \delta_i \bar{e}_i$$

combinazione lineare a coeff. non tutti = 0 dei vettori di $\mathcal{B}_U$ $\neq$

Perché $\mathcal{B}_U$ base $\Rightarrow$ la sequenza
 $(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1} \bar{e}_1 \dots \bar{e}_i \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-1})$

è libera $\Rightarrow \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ $\square$

Exercise: In $\mathbb{R}^5$ si determinino minimo e massimo dimensione delle intersezione di due sottospazi di dim = 4.

$$U, W \subseteq \mathbb{R}^5 \quad \dim U, \dim W = 4$$

$$\dim U + W \leq 5$$

$$\begin{aligned} \dim U + \dim W - \dim U \cap W &= \\ &= 4 + 4 - \dim U \cap W. \end{aligned}$$

$$8 - \dim U \cap W \leq 5$$

$$\dim U \cap W \geq 8 - 5 = 3 \quad \text{MINIMUM.}$$

$$U, W \leq V \quad \dim \max = \min (\dim U, \dim W) = 4.$$

$$\max (\dim U, \dim W) \leq \dim U + W \leq \min (\dim U + \dim W, \dim V)$$

$$\max (0, \dim V + \dim U + \dim W) \leq \dim U \cap W \leq \min (\dim U, \dim W)$$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim U + W \leq \min(\dim V, \dim U + \dim W)$$

$$\max(0, \dim U + \dim W - \dim V) \leq \dim U \cap W \leq \min(\dim U, \dim W)$$

Def: In $V_n(K)$ sia $U \leq V_n(K)$.

Si dice complemento diretto di U un sottospazio W tale che $U \oplus W = V$.

Def: Si dice che $t_1, \dots, t_r$ sottospazi sono in somma diretta $W_1 \dots W_r$ se ogni vettore

di $W_1 + W_2 + \dots + W_r$ si scrive in modo unico come somma di vettori $\bar{w}_i \in W_i$.

Tutte le basi di W_i $\rightarrow$ base della somma

Se il ker della funzione

$$\prod \{ W_1 \times \dots \times W_r \rightarrow W_1 + \dots + W_r \}$$

$$(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_r) \rightarrow \bar{w}_1 + \dots + \bar{w}_r$$

è uguale a $\{0\}$.

N.B.: Se $w_2 \dots w_t$ sono in somma diretta

$$\Rightarrow V_{i,j}: w_i \cap w_j = \{0\}.$$

Però questo non basta!!

$$w_2 = \mathbb{Z} \langle (100) \rangle$$

$$w_2 \cap w_2 = \{0\}$$

$$w_2 = \mathbb{Z} \langle (110) \rangle$$

$$w_2 \cap w_3 = \{0\}$$

$$w_3 = \mathbb{Z} \langle (010) \rangle$$

$$w_2 \cap w_3 = \{0\}.$$

MA LA SOMMA NON È DIRETTA

$$\text{infatti: } \dim(w_2 + w_3 + w_3) = 2 \neq 3 = 1 + 1 + 1$$

Théorème nullité + rang.

$f: V \rightarrow W$ linéaire.

dimensio null(f) $::=$ dim Ker f

rk(f) $::=$ dim Im f .

Alors

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$$